

FUNDAMENTOS Y EVALUACIÓN DEL GRADO DE INDETERMINACIÓN CINEMÁTICA EN ESTRUCTURAS

Hugo Félix Begliardo

Ingeniero Civil - Rafaela (Santa Fe)

hugo.begliardo@frra.utn.edu.ar

Prof. Asoc. Análisis Estructural I - Universidad Tecnológica Nacional-F.R.Rafaela

Resumen

El Método de las Fuerzas y el de los Desplazamientos constituyen los dos grandes métodos del Análisis Estructural. La resolución de estructuras por el primero de ellos normalmente se restringe a aplicaciones manuales con pocas incógnitas. Precisamente, el número de estas está asociado al de los vínculos en exceso con que cuenta la estructura respecto de los necesarios para permanecer estable, y se lo conoce como "grado de indeterminación estática".

Con el advenimiento de la computación digital, se ha preferido utilizar el Método de los Desplazamientos para la resolución de problemas en mecánica estructural. La razón de ello es, básicamente, la factibilidad de poder sistematizarse y programarlo, ventaja que salvo contada excepción, no es posible hallar en el de las Fuerzas. En el Método de los Desplazamientos el número de incógnitas está vinculado a los desplazamientos independientes de los nudos de la estructura, por lo que su indeterminación es cinemática y conocida como "grados de libertad".

El objetivo de este trabajo es presentar y fundamentar académicamente la evaluación del grado de indeterminación cinemática en sistemas estructurales, a partir de un desarrollo teórico y enfoque diferentes al tradicionalmente ofrecido en la enseñanza de la ingeniería, acompañándose de ejemplos de validación.

Abstract

Force and Displacement Methods are the two main methods in Structural Analysis. The resolution of structures by the first of them is normally limited to manual applications with few unknowns. Indeed, the number of these is associated with that of the redundant links that the structure has in relation to those needed to remain stable, and it is known as "degree of static indeterminacy."

With the advent of digital computing, the Displacement Method has been most commonly employed to solve problems of structural mechanics. This is basically due to its capacity to be systematized and programmed, an advantage that, with a few exceptions, cannot be found in the Force Method. In the Displacement Method the number of unknowns is linked to the independent movement of the nodes of the structure, hence, its indetermination is kinematic and known as "degrees of freedom."

The aim of this paper is to present, and academically substantiate, the assessment of the degree of kinematic indeterminacy in structural systems from a theoretical approach different from the one traditionally offered in the teaching of engineering, and to provide validation examples.

1. Introducción

La respuesta de una estructura frente a acciones exteriores que perturban su estado inicial, quedará expresada a partir del conocimiento de las *fuerzas* que la solicitan y los *desplazamientos* asociados a ellas. Entre ambos existe una perfecta correspondencia, al punto tal que conocidas las fuerzas será factible determinar los desplazamientos y viceversa.

Esta íntima relación ha dado origen a los grandes métodos del análisis estructural, el *Método de las Fuerzas* y el de los *Desplazamientos*, los cuales constituyen una versión técnica de las ecuaciones de Beltrami – ecuaciones de compatibilidad en función de las tensiones - y las Ecuaciones de Navier –ecuaciones de equilibrio en función de los desplazamientos -, procedimientos básicos de la Teoría de la Elasticidad [1].

El diagrama de Tonti, aplicado a una barra sometida a un esfuerzo axial, pone en evidencia la dualidad entre ambos (Figura 1) [2].

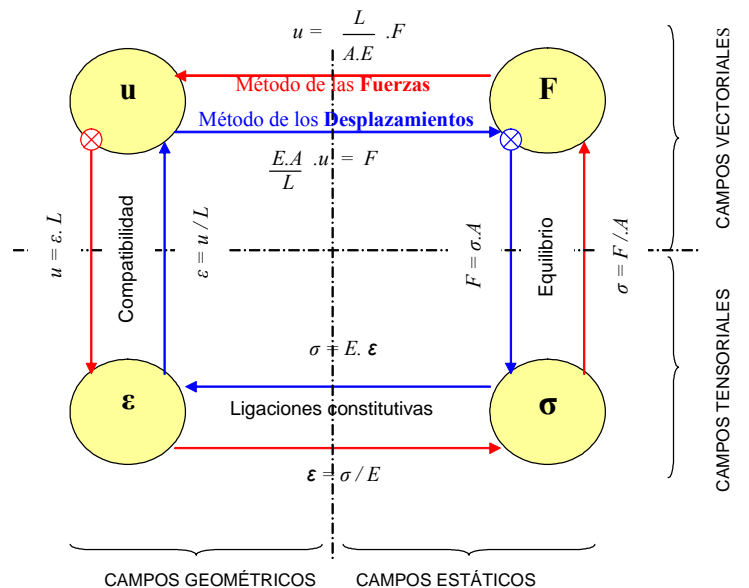


Figura 1. Diagrama de Tonti

En el Método de las Fuerzas las incógnitas son *fuerzas*. Cuando se aborda la resolución de un problema por esta vía, el número de vínculos en exceso que tiene la estructura, respecto de los necesarios para permanecer en equilibrio, determina el número de dichas incógnitas y es conocido como *grado de indeterminación estática*. Para la evaluar el grado de indeterminación estática en estructuras de barras, en la literatura abundan fórmulas propuestas por diversos autores, distinguiendo entre sistemas de alma llena y articulados, o bien unificando su tratamiento [3],[4],[5],[6].

En el Método de los Desplazamientos las incógnitas son *desplazamientos*. De resolver un problema por éste la indeterminación es de tipo geométrica o cinemática, se la conoce como *grados de libertad* (GL) y está vinculada a los desplazamientos independientes de los *nudos* de la estructura (traslaciones y rotaciones). Su

evaluación se practica a partir de un proceso sencillo de identificación y conteo de tales desplazamientos.

El objetivo de este trabajo es presentar expresiones elementales que sistematizan la evaluación del grado de indeterminación cinemática, tanto en sistemas planos como espaciales de barras, acompañadas de ejemplos de validación, a partir de un tratamiento amplio y enfoque sensiblemente diferente al tradicionalmente ofrecido en la enseñanza de la ingeniería.

2. Grados de libertad en cuerpos sólidos

2.1. Grados de libertad de una partícula

Entenderemos por *partícula o cuerpo puntual* al ente de cuyas dimensiones y estructura interna podremos prescindir para el estudio del problema que nos ocupa, puntos geométricos en el aspecto del tamaño [7] pero que, como todo cuerpo, ocupan un lugar en el espacio y tienen masa.

El estudio del movimiento de los cuerpos es objeto de la Mecánica Clásica. El concepto de *movimiento* está asociado a la *libertad* de poder hacerlo, libertad que se entenderá absoluta en tanto no haya restricciones al desplazamiento.

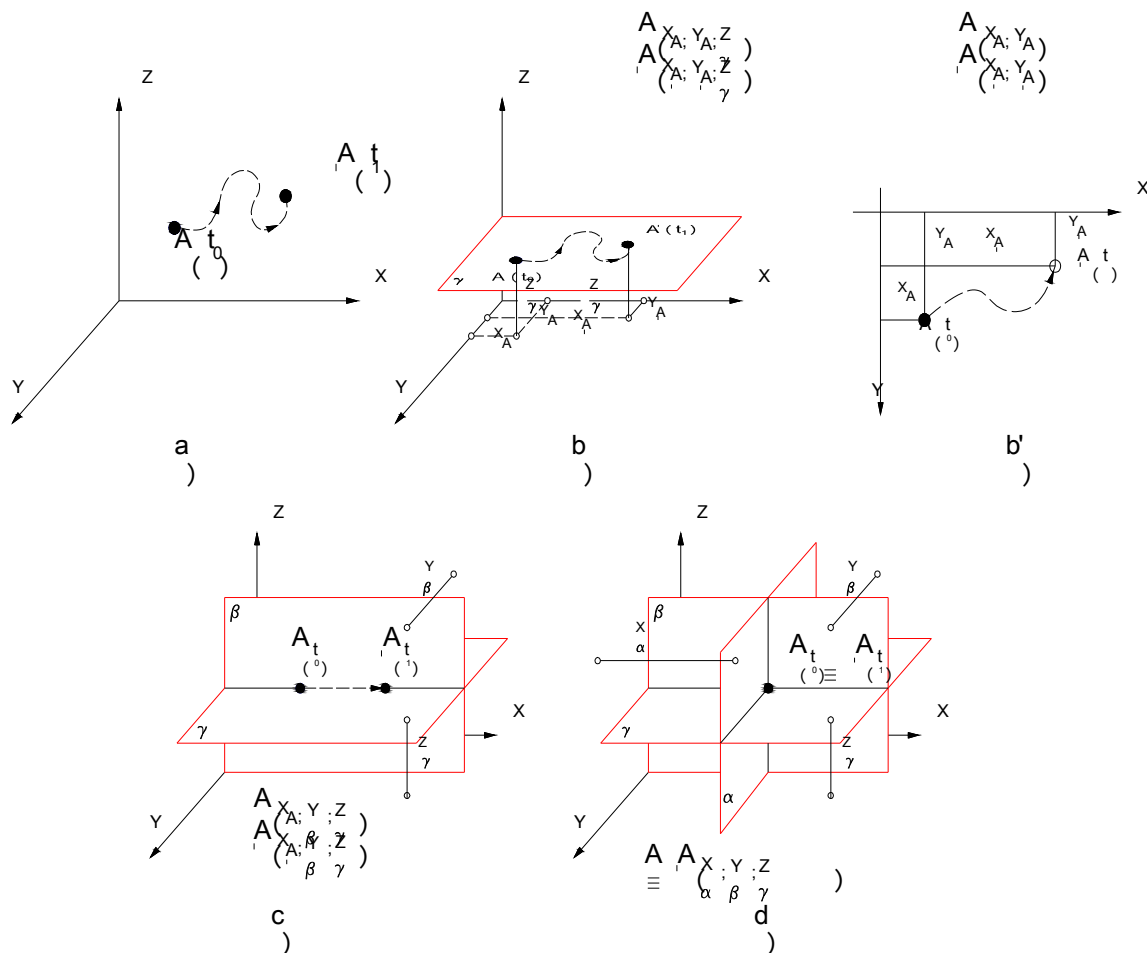


Figura 2. GL de una partícula en el espacio

La Figura 2.a ilustra cómo una partícula es libre de desplazarse en el espacio, pasando de una posición A , en el instante t_1 a una posición A' en el instante t_2 . Su movilidad se verá restringida si se le impone como condición que sólo lo haga en el plano γ , paralelo al xy , situado a una cota z_γ , (Figura 2.b). Del mismo modo, si se le agrega una nueva restricción al desplazamiento, esto es, que su movimiento esté contenido también en el plano β , paralelo al zx y distante a una ordenada y_β de éste, sólo podrá hacerlo a lo largo de una línea para satisfacer ambos requisitos (Figura 2.c). Por último, si se le agrega como condición que también se desplace según el plano α paralelo al zy , ubicado a una abscisa x_α , la partícula ya no podrá moverse (Figura 2.d).

Con lo analizado se tiene que si han sido necesarias tres condiciones de vínculo, *independientes* entre sí, para quitarle la absoluta *libertad* de movimiento, por vía inversa, de eliminárselas la volverá a recuperar. Por lo tanto, ello nos permite afirmar que

Una partícula en el espacio posee 3 grados de libertad.

La posición del cuerpo puntual ha sido definida a partir de tres coordenadas independientes, y no más que tres. En este caso han sido cartesianas, aunque bien podrían ser de cualquier otro tipo. Por consiguiente, podremos establecer que

Grados de libertad es el número mínimo de coordenadas independientes con las cuales es factible conocer la configuración (posición/forma) de un cuerpo que experimenta o ha experimentado desplazamiento (traslación y/o rotación).

De lo analizado, surge que si el movimiento del dicho punto material se ve restringido al plano (Figuras 2.b y b'), se tendrá que

Una partícula en el plano posee 2 grados de libertad.

2.2. Grados de libertad de un sistema de "p" partículas

Extendiendo el estudio anterior a un conjunto discreto de masas (Figura 3.a), se tiene que

Un sistema de "p" partículas en el espacio posee "3p" grados de libertad.

Del mismo modo (Figura 3.b),

Un sistema de "p" partículas en el plano posee "2p" grados de libertad.

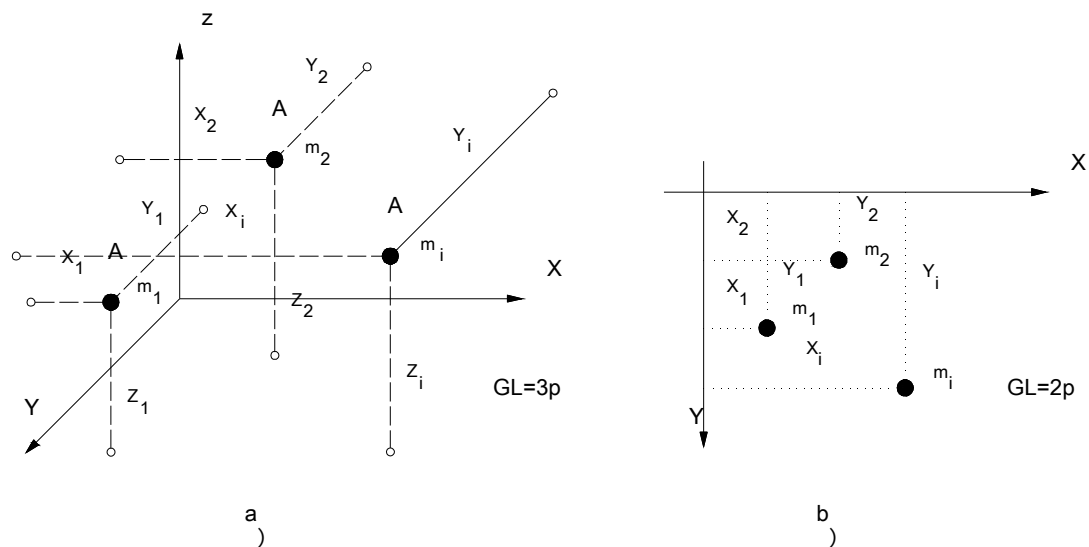


Figura 3. GL de un conjunto discreto de masas o partículas:
a) en el espacio; b) en el plano

2.3. Grados de libertad de un sistema de 2 partículas con distancia mutua invariable

Para asumir la invariabilidad de la distancia mutua puede suponérselas unidas por un ente ficticio conformado por una varilla rígida, inextensible, sin peso y de longitud conocida l (Figura 4.a). La determinación de los grados de libertad de este conjunto discreto de masas es inmediata al observar la Figura 4.b, concluyéndose en que bastarán tres coordenadas independientes para fijar la posición de la de masa m_1 , correspondiente al primero de los puntos materiales, y sólo dos para la restante, a diferencia de las seis necesarias si las partículas no estuviesen vinculadas. Luego,

Un sistema de 2 partículas en el espacio, cuya distancia mutua se mantiene invariable, posee en el espacio 5 grados de libertad.

Es evidente que el ente conformado por la varilla imaginaria le ha restado un grado de libertad al conjunto. La distancia mutua, invariable y conocida, determina la ligadura asociada al grado de libertad perdido y su ecuación es la de la recta en el espacio:

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad (1)$$

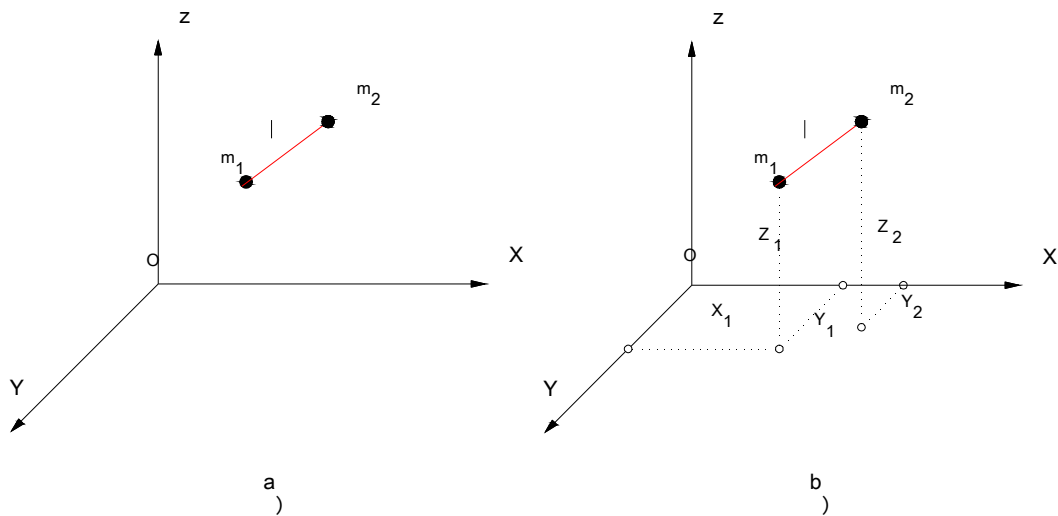


Figura 4. GL de un conjunto discreto de 2 partículas en el espacio con distancia mutua invariable

Bajo un razonamiento similar se deduce que (Figura 5):

Un sistema discreto de dos partículas en el plano, con distancia mutua invariable, posee tres grados de libertad.

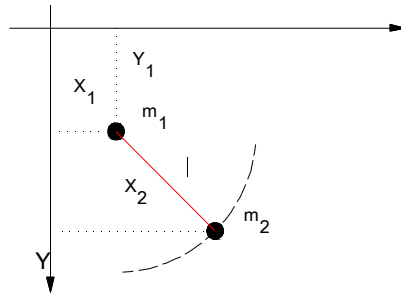


Figura 5. GL de un conjunto discreto de 2 partículas en el plano con distancia mutua invariable

2.4. El sólido rígido

El caso del sistema discreto de dos partículas con distancia mutua invariable sienta las bases para definir al *sólido rígido* y en función de ello elaborar su correspondiente mecánica. La invariabilidad de dicha equivale a expresar la *hipótesis de rigidez* del par. Esto es, si bien los *cuerpos materiales reales* no pueden ser considerados como partículas, puesto que sus dimensiones y estructura interna en los casos que habitualmente nos ocupan pasan a cobrar importancia, lícito es considerar al sólido rígido como a aquel ente conformado por un conjunto discreto de masas puntuales que mantienen invariables las distancias entre sí ^[7], independientemente del tiempo. Es decir, tomadas de a parejas con varillas sin peso.

2.4.1. El sólido rígido unidimensional

Asimismo, puesto que dos partículas unidas por un vínculo como el que se estudia se hallan contenidas en una recta, lo analizado es perfectamente aplicable a todos aquellos sólidos cuyas dimensiones transversales sean despreciables respecto a las longitudinales (caso de barras, bielas). De ello se deduce que la configuración de estas formas estructurales lineales podrá precisársela de manera discreta, bastando para ello determinar las coordenadas de los dos puntos materiales extremos.

La importancia de la conclusión anterior radica en que, estando el continuo lineal constituido por infinitos puntos materiales, bastarán solo tres coordenadas independientes en el plano, o cinco en el espacio, referidas a los extremos, para establecer su posición tras un desplazamiento. Todas las restantes coordenadas del interior del dominio serán dependientes de aquellas.

El sólido rígido unidimensional o barra es, en esencia, la idealización de una chapa en la cual una de sus dimensiones es significativamente mayor que la restante (Figura 6)

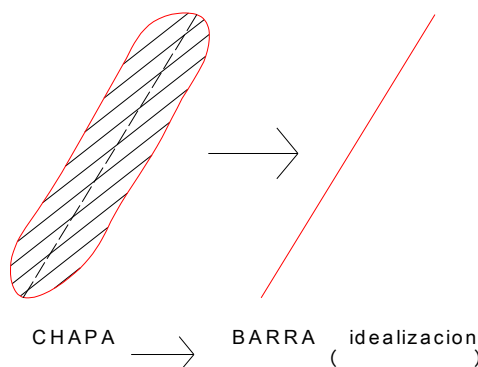


Figura 6. La barra como idealización de la chapa.

Fue Lagrange quien en 1788 formuló las ecuaciones del movimiento a partir de coordenadas independientes, también llamadas generalizadas, aplicables tanto al sólido *rígido* como al continuo *deformable*.

2.5. Grados de libertad del sólido rígido bidimensional (chapa)

Bastará establecer la posición de tres puntos no alineados, tales como A, B y C de la Figura 7.a, para definir completamente la configuración de una chapa rígida en el espacio.

Ciertamente, dos puntos materiales tales como A y B, separados por una distancia l_1 , invariable por la condición de rigidez, necesitan de 5 coordenadas independientes tales como x_a, y_a, z_a, x_b y z_b , para ser fijadas al espacio, según lo visto en 2.3. (Figura 7.b). Bajo estas condiciones, un punto tal como el C podrá rotar en torno a AB. Si se lo fija con una nueva coordenada tal como z_c el cuerpo perderá enteramente su libertad de movimiento (Figura 7.c). Luego,

Una chapa en el espacio posee seis grados de libertad

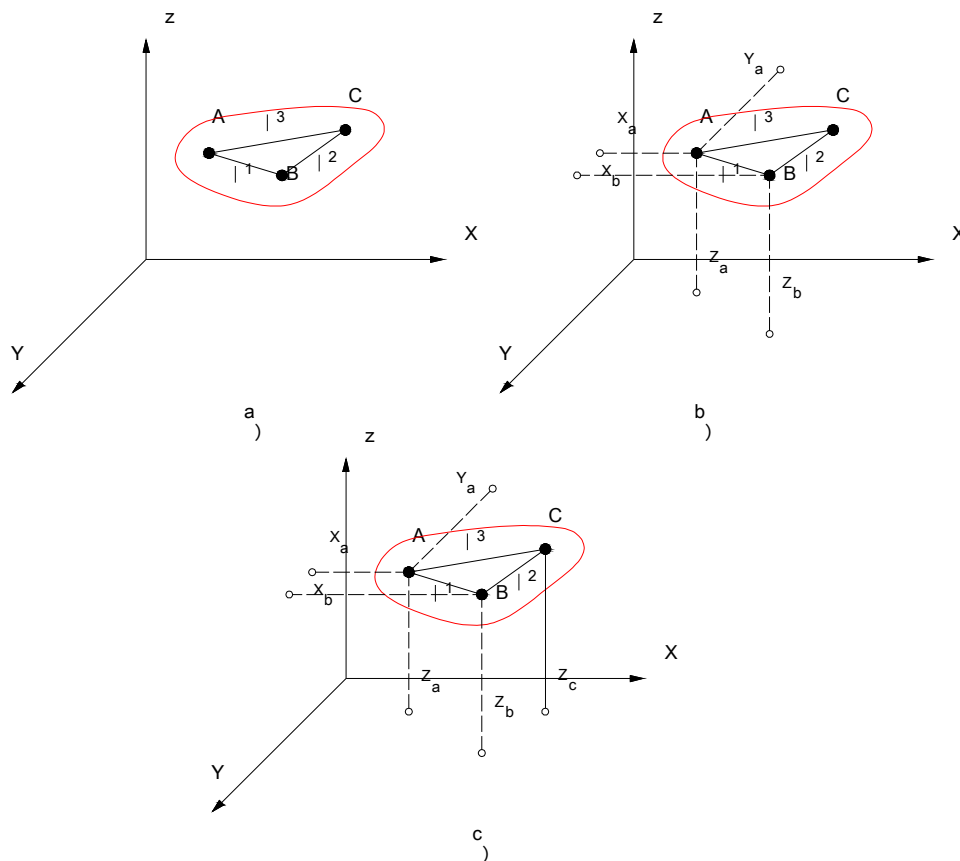


Figura 7. Grados de libertad de una chapa en el espacio

A la misma conclusión se habría arribado si se tiene en cuenta que cada condición de ligadura le resta un grado de libertad a los tres puntos considerados como partículas, conforme al lo analizado en 2.3.

A partir de lo anterior, se puede demostrar que (Figura 8)

Una chapa en el plano posee tres grados de libertad

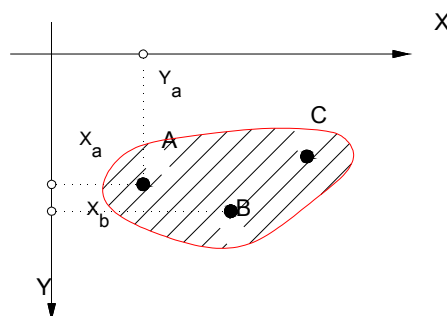


Figura 8. Grados de libertad de una chapa en el plano

2.6. Grados de libertad del sólido rígido tridimensional

En la Figura 9 se tiene a un sólido rígido espacial que, por simpleza, se representó mediante un cubo.

En función de los concluido en 2.5.) tres puntos cualesquiera del mismo, por ej. A , B y C , requieren de seis coordenadas independientes para establecer su posición. Todo otro punto del continuo será perfectamente localizado a partir de los tres mencionados dada la condición de rigidez. Luego, al igual que una chapa en el espacio

El sólido rígido tridimensional posee en seis grados de libertad

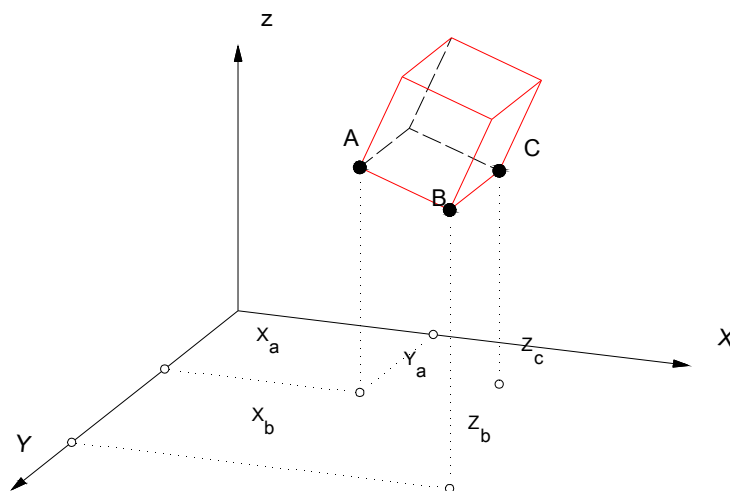


Figura 9. Grados de libertad del sólido tridimensional

2.7. El sólido deformable

Los cuerpos reales no son rígidos, sino que se deforman ante las acciones que obran sobre el mismo. Ello implica que las ligaduras entre los puntos materiales ya no serán inextensibles e inflexibles, como se las han venido considerando. Esa deformación va asociada a un movimiento de separación o acercamiento de los puntos que componen su dominio. Si hay movimiento, es indicio de la presencia de grados de libertad en ellos. Pero, como el dominio está constituido por infinitos puntos de masa infinitésima, se inferiría de ello que la indeterminación será de grado infinito. Sin embargo no es así, puesto que al igual que lo deducido para el sólido rígido bastará expresar su configuración a partir de unas pocas coordenadas independientes. En el caso de estructuras lineales, referidas a los puntos materiales extremos.

En Mecánica de Estructuras, gran parte de los métodos empleados se basan en el *principio de linealidad*, el cual establece que la respuesta estructural (esfuerzos, desplazamientos) es una función lineal de la sollicitación, en tanto se admita el cumplimiento de las *hipótesis de linealidad geométrica* (principio de rigidez) y de *linealidad elástica* ^[8].

La primera supone desplazamientos muy pequeños, tales que la geometría deformada no difiera sensiblemente de la original. Ello permite trabajar con esta última para el planteo de las ecuaciones de equilibrio al abordar la resolución de los problemas; la segunda implica trabajar dentro de la validez de la Ley de Hooke

(relación elástica y lineal entre tensiones y deformaciones). Es, precisamente, la *hipótesis de linealidad elástica* la que provee la condición de dependencia de las restantes coordenadas, al determinar que el estado de deformación no podrá ser arbitrario o caprichoso, sino que se hallará condicionado a dicha ley.

La aceptación de ambas hipótesis garantiza, a su vez, la validez de la aplicación del *principio de superposición de los efectos (p.s.e.)*:

“El efecto de varias causas que actúan simultáneamente sobre un cuerpo es igual a la suma de los efectos que se obtendrían de la actuación aislada de cada causa”.

Entendiéndose por *causas y efectos* a las acciones (fuerzas) y desplazamientos, o viceversa ^[9].

2.7.1. Estado de sollicitaciones en una sección del sólido

Un sólido prismático seccionado tal como el de la Figura 10.a, necesita se le aplique en el baricentro de la sección la resultante de fuerzas R y el par de reducción M para que se vea restituida la situación de equilibrio.

En la Figura 10.b se tiene el mismo efecto a partir de la descomposición de ambos vectores sobre una terna de ejes ortogonales x,y,z , observándose la equivalencia de cada componente con los conocidos esfuerzos Normal, Corte, Momentos Flector y Torsor.

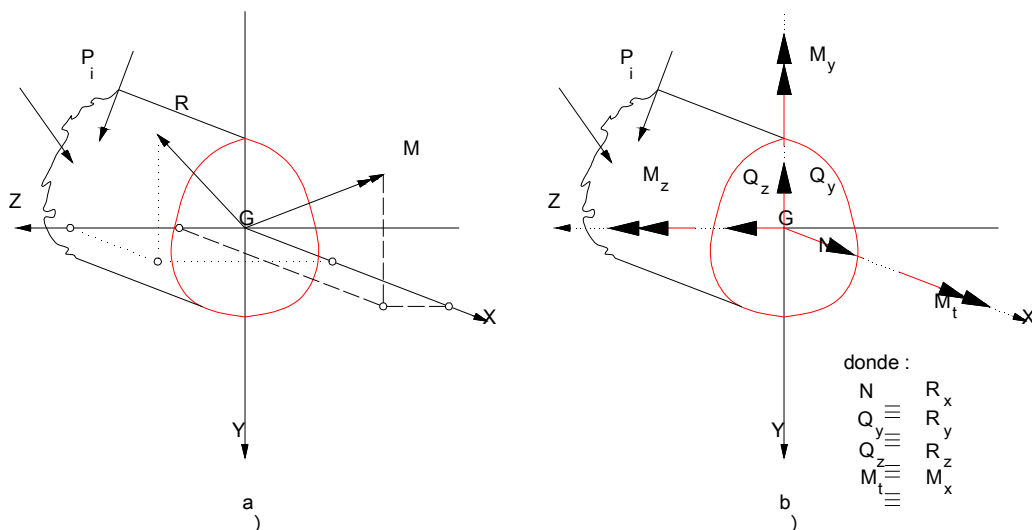


Figura 10

En base ello, se tiene que por aplicación del p.s.e. puede determinarse *todo estado real de deformación a partir de una adecuada superposición de desplazamientos contenidos en planos ortogonales*. Dicho de otro modo, la configuración final de un sólido deformable es el resultado de la superposición de las deformaciones contenidas en los planos xy , yz , zx , provocadas por cada uno de los esfuerzos obrantes. En la Figura 11 se esquematiza lo señalado.

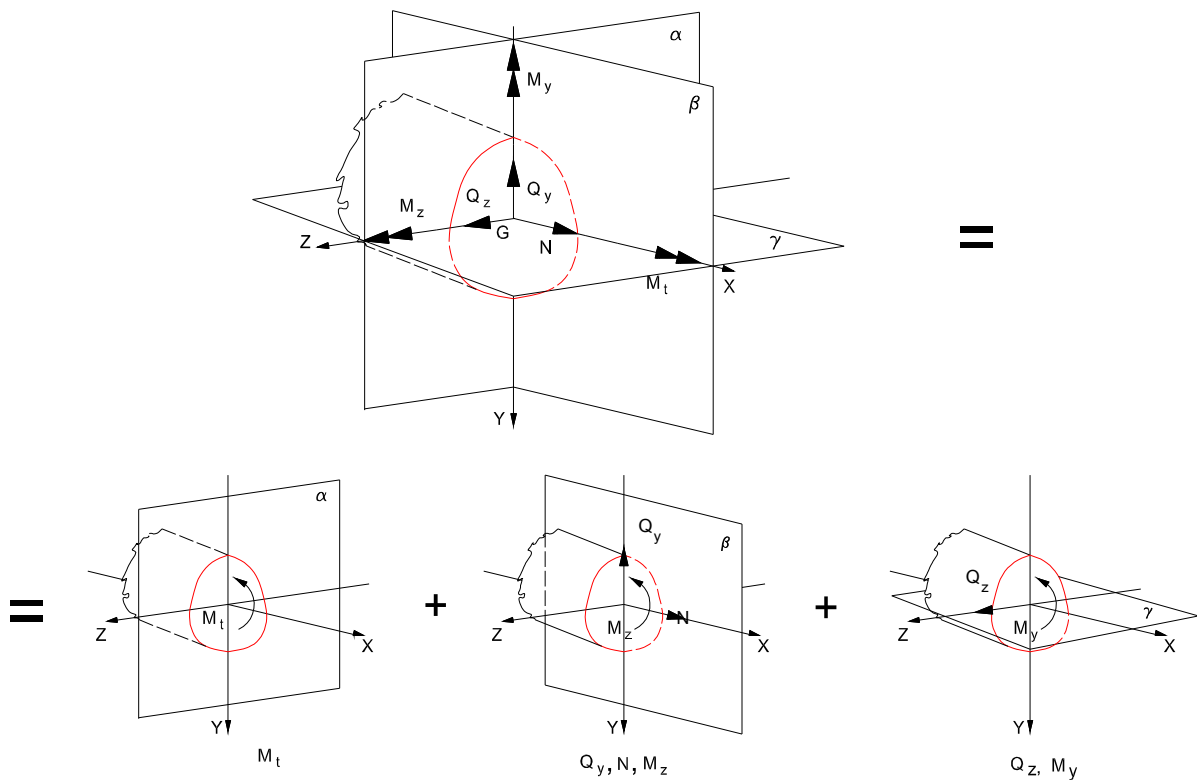


Figura 11

2.7.2. Leyes que gobiernan las deformaciones en el sólido

Las relaciones elásticas que permiten conocer la configuración de cualquier punto del dominio de una estructura prismática estarán dadas, para cada sollicitación, por conocidas ecuaciones vinculadas a la ley de ligación constitutiva del material. Todo desplazamiento habido a lo largo del dominio y en cualquier punto de la sección escogida, será dependiente de lo que ocurra en los *nodos* extremos y quedará ligado a dicha ley. En la Tabla 1 se resumen las expresiones que comúnmente se presentan en los textos de mecánica estructural. En ella se agregan los desplazamientos a causa de cambios de temperatura.

En la mecánica del sólido deformable pasa a cobrar importancia la rotación de los entes conformados por las masas puntuales frente a las sollicitaciones de flexión y torsión. El conocimiento de los ángulos de giro en los nodos extremos permite determinar los giros relativos entre secciones, y por consiguiente la posición de todo punto del tramo interior y de la sección correspondiente de la pieza.

El aporte del esfuerzo de corte a la energía de deformación en barras prismáticas que responden a la viga de Euler-Bernoulli es despreciable, por lo cual puede no ser tenido en cuenta.

Tabla 1. Desplazamientos debidos a las diferentes solicitaciones.

Solicitación	Desplazamiento	Observaciones
Axil	$d\Delta=(N/EA)dx$	$d\Delta$: cambio de longitud de un elemento de longitud inicial dx
Flexión	$d\theta=(M/EI)dx$ $d\Delta=(l-x) d\theta$	$d\theta$: ángulo relativo de rotación entre dos secciones transversales distantes dx . $d\Delta$: deflexión a una distancia $(l-x)$ provocada por un giro relativo $d\theta$.
Torsión pura	$d\Phi=(M_t/GJ)dx$	$d\Phi$: ángulo relativo de rotación entre dos secciones transversales distantes dx .
Corte	$d\lambda=f(Q/GA)dx$	$d\lambda$: desplazamiento relativo entre secciones distantes dx . f : factor de cortadura de la sección.
Temperatura Uniforme	$d\Delta=\alpha(\Delta T)dx$	$d\Delta$: cambio de longitud de un elemento de longitud inicial dx debido un cambio uniforme de temperatura. α : coeficiente de dilatación térmica.
Temperatura No uniforme	$d\theta=(\alpha/h)(T_1-T_2)dx$	$d\theta$: ángulo relativo de rotación entre dos secciones transversales distantes dx , por temperatura no uniforme. h : altura de la viga T_1, T_2 : Temperaturas en caras inferior y superior de la viga, respectivamente.

2.8. Las estructuras lineales o de barra

La *barra* es el componente distintivo de las estructuras lineales Puede presentarse *aislada*, con configuración recta o curva, o *asociada* con otras barras a través de *conexiones* o *uniones* adecuadas. En la Figura 12 se grafica e identifica el modo común con que suele clasificarse a estas últimas.

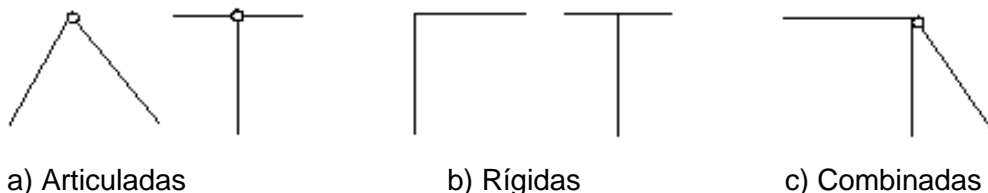


Figura 12. Tipos de uniones entre barras

La respuesta de una estructura es buscada en los *nodos* de la misma, por cuanto a partir de ellos es posible determinarla en cualquier otro punto de interés de su dominio. En estructuras lineales se entiende por *nodo* a:

- a) Todo punto donde se encuentran dos o más miembros. Esto es, a las uniones articuladas, rígidas o combinadas.
- b) Todo punto de apoyo o vínculo de la estructura a tierra.
- c) Los extremos libres de las barras.
- d) Todo cambio brusco de la sección en el tramo de una barra.

Los sistemas estructurales de barra pueden estar dispuestos tanto en el plano como en el espacio. En Tabla 2 se incluye la denominación más común dada a las formas estructurales que quedan comprendidas en una y otra clasificación. Los emparrillados suelen ser considerados como sistemas espaciales en razón de la presencia de fuerzas y desplazamientos asociados no coplanares. Los sistemas mixtos o compuestos consisten en combinaciones de los de alma llena y los reticulados articulados en sus extremos.

Tabla 2. Clasificación de los sistemas estructurales de barra

Sistemas planos de barras	Sistemas espaciales de barras
1. De alma llena <ul style="list-style-type: none"> 1.1. Vigas <ul style="list-style-type: none"> 1.1.1 Aisladas 1.1.2 Cadenas Cinemáticas <ul style="list-style-type: none"> 1.1.2.1. Abiertas 1.1.2.2. Cerradas 1.2. Pórticos planos 	1. De alma llena <ul style="list-style-type: none"> 1.1. Emparrillados 1.2. Pórticos espaciales
2. Reticulado articulados <ul style="list-style-type: none"> 2.1. Armaduras planas 	2. Reticulado articulados <ul style="list-style-type: none"> 2.1. Armaduras espaciales
3. Mixtos o compuestos	3. Mixtos o compuestos

2.9. Evaluación del grado de indeterminación cinemática

El cálculo de los grados de libertad se puede realizar mediante dos vías, una basada en la suma de los grados de libertad de cada uno de los nodos intermedios más los de los apoyos a tierra ^[10],

$$GL = GL_{NI} + GL_A \quad (2)$$

Donde:

GL = grado de indeterminación cinemática de la estructura

GL_{NI} = grados de libertad de los nodos intermedios

GL_A = grados de libertad permitidos por los vínculos a tierra.

La otra conforme lo proponen Cervera Ruiz y Blanco Díaz (2004) ^[9], mediante la diferencia entre los grados de libertad de todos los nodos de la estructura,

considerada como cuerpo libre, y los grados de libertad que, efectivamente, restringen las condiciones de apoyo a tierra:

$$GL = GL_{NT} - R_A \quad (3)$$

Donde:

GL = grado de indeterminación cinemática de la estructura.

GL_{NT} = grados de libertad de todos los nodos, incluyendo los apoyos (sin considerar la restricción impuesta por estos).

R_A = grados de libertad restringidos por los apoyos a tierra.

En este trabajo se desarrollarán expresiones elementales que sistematizan su evaluación, tanto en sistemas planos como espaciales de barras, conforme a la vía planteada por estos últimos autores.

2.9.1. GL en sistemas planos de barras

La expresión que permite sistematizar el cálculo del mismo en sistemas *planos*, sean de *alma llena*, *reticulados articulados* o *mixtos* (Tabla 2) es:

$$GL = \sum_N (2 + n) - \sum_V r_j \quad (4)$$

Teniéndose la siguiente correspondencia con lo dado en (3):

- $GL_{NT} = \sum_N (2 + n)$

Donde:

El primer término del sumando entre paréntesis guarda relación con las dos posibilidades de movimiento (u y v) de todo nudo al que concurren dos o más barras, según el par de ejes coordenados x,y que definen el plano donde queda contenida la estructura. El término n es el número de extremos de barras que concurre al nudo, susceptibles de rotar de modo independiente un ángulo θ_z en torno al eje de punta z . La sumatoria debe extenderse a los N nodos de la estructura, incluyendo los vínculos, sin considerar la restricción impuesta por estos (estructura como cuerpo libre).

- $R_A = \sum_V r_j$

Donde:

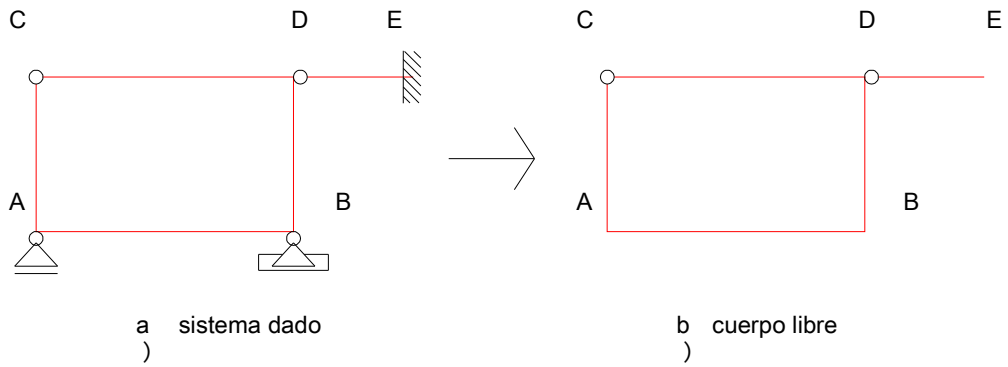
r_j = vínculo a tierra de la especie "j" (Tabla 3) ; la sumatoria debe extenderse a los V vínculos o apoyos a tierra de la estructura.

Tabla 3. Sistemas planos de barras: Grados de libertad restringidos por los apoyos

Tipo de vínculo	GL impedidos
Apoyo de 1ª Especie (simple)	1
Apoyo de 2ª Especie (doble)	2
Apoyo de 3ª Especie (empotramiento)	3

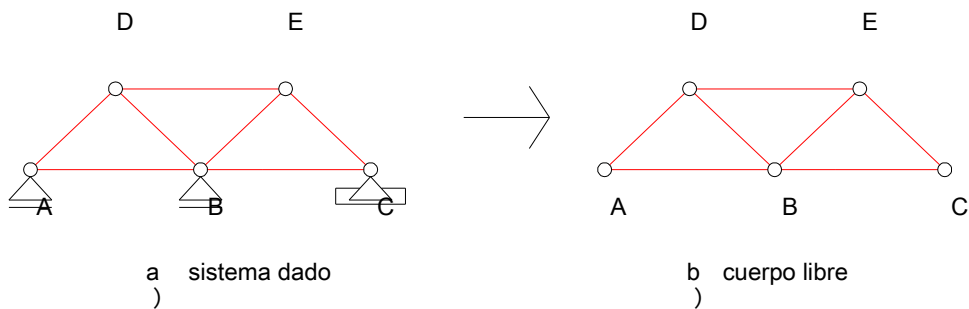
Ejemplos de aplicación en sistemas planos

1) De alma llena



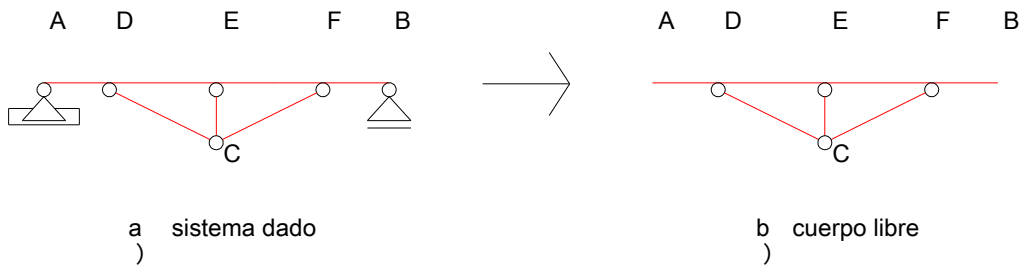
Nudo	n	$(2+n)$	r_j	GL
A	1	3	1	2
B	1	3	2	1
C	2	4	0	4
D	2	4	0	4
E	1	3	3	0
Σ		17	6	11

2) Articulados



Nudo	n	$(2+n)$	r_j	GL
A	0	2	1	1
B	0	2	1	1
C	0	2	2	0
D	0	2	0	2
E	0	2	0	2
Σ		10	4	6

3) Mixtos



Nudo	n	$(2+n)$	r_j	GL
A	1	3	2	1
B	1	3	1	2
C	0	2	0	2
Σ		8	3	5
Obs.: D,E y F son dependientes de A y B				

2.9.2. GL en sistemas espaciales de barras

Para sistemas *espaciales* de barras, *aportados*, *reticulados articulados* o *mixtos* (Tabla 2), la expresión para calcular la indeterminación cinemática es:

$$GL = \Sigma_N 3(1 + n) - \Sigma_V r_j \quad (5)$$

En correspondencia con la (3) tendremos que:

- $GL_{NT} = \Sigma_N 3(1 + n)$

Donde:

$\Sigma_N 3(1 + n) = \Sigma_N (3+3n)$. El primer término del sumando entre paréntesis guarda relación con las tres posibilidades de movimiento (u, v, w) que tiene en el espacio todo nodo en correspondencia con la terna de ejes coordenados x, y, z . El término n es el número de extremos de barras susceptibles de rotar de modo independiente del total que concurren al nodo, y el factor 3 se vincula a los tres giros posibles θ_x, θ_y y θ_z , uno en torno a cada eje coordenado.

La sumatoria debe extenderse a los N nodos de la estructura, incluyendo los vínculos, sin considerar la restricción impuesta por estos.

- $R_A = \Sigma_V r_j$

Donde:

r_j = vínculo a tierra de la especie "j" (Tabla 4) ; la sumatoria debe extenderse a los V vínculos o apoyos a tierra de la estructura.

Para sistemas *emparrillados*, la correspondiente expresión es:

$$GL = \Sigma_N (1 + 2n) - \Sigma_V r_j \quad (6)$$

Tabla 4. Grados de libertad restringidos por los apoyos en sistemas espaciales de barras.

Tipo de Vínculo ^{[6],[10]}	GL impedidos		
	Pórticos y Mixtos	Armaduras	Emparrillados
Apoyo de 1ª Especie	1	1	1
Apoyo de 2ª Especie	2	2	1
Apoyo de 3ª Especie (rótula esférica)	3	3	1
Apoyo de 4ª Especie	4		2
Apoyo de 5ª Especie	5		2
Apoyo de 6ª Especie (empotramiento)	6		3

En correspondencia con la ec.(2) tendremos que:

$$GL_{NT} = \sum_N (1 + 2n)$$

Donde:

El primer término del sumando entre paréntesis guarda relación con la única posibilidad de traslación de los nudos en este tipo de estructuras, el desplazamiento vertical w , en correspondencia con el eje z de la terna coordenada que define el espacio. El término n es el número de extremos de barras susceptibles de rotar de modo independiente del total que concurre al nudo, y el factor 2 se vincula a los dos giros posibles (θ_x y θ_y), en torno a los ejes que definen el plano x,y donde está contenida la geometría indeformada de la estructura.

La sumatoria debe extenderse a los N nodos de la estructura, incluyendo los vínculos, sin considerar la restricción impuesta por estos.

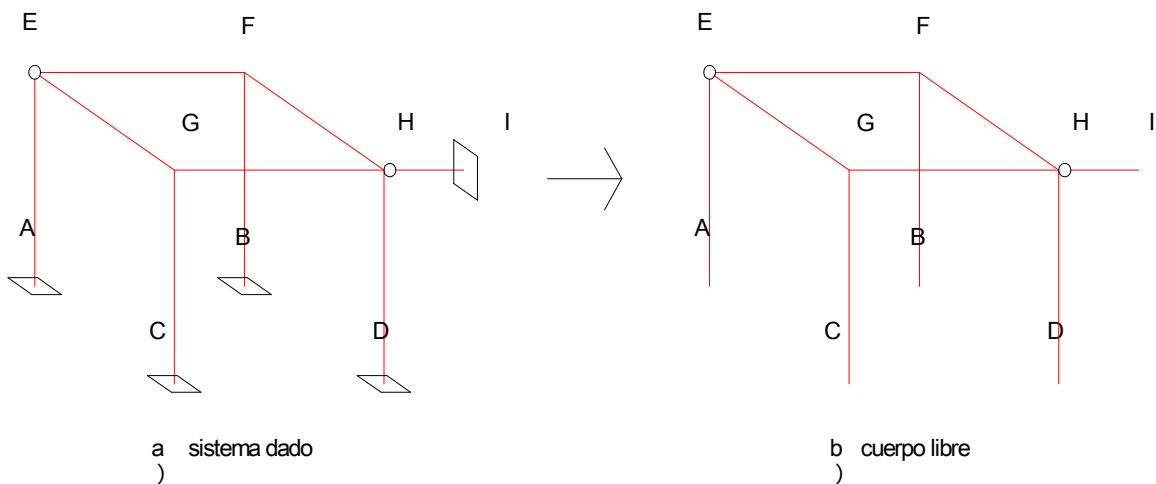
$$R_A = \sum_V r_j$$

Donde:

r_j = vínculo a tierra de la especie "j" (Tabla 4) ; la sumatoria debe extenderse a los V vínculos o apoyos a tierra de la estructura.

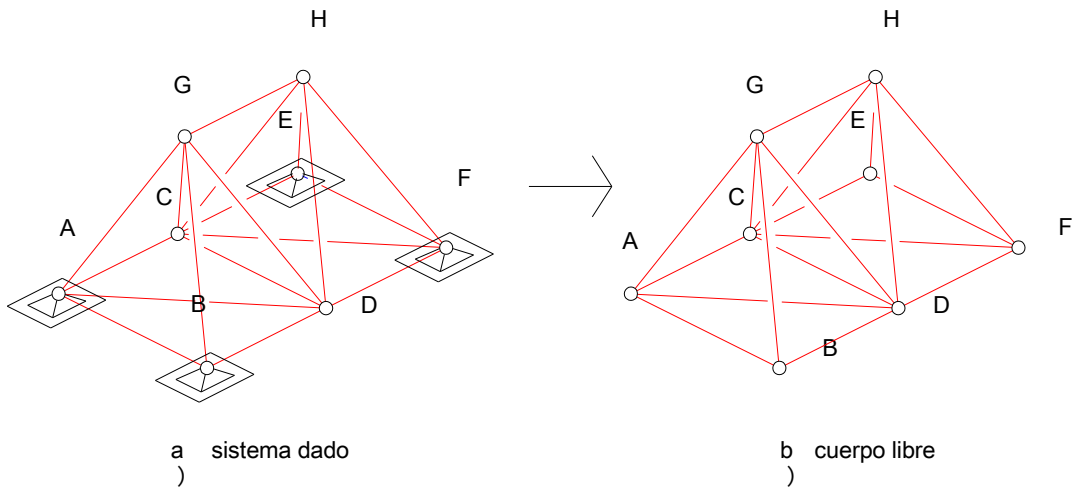
Ejemplos de aplicación en sistemas espaciales

1) De alma llena



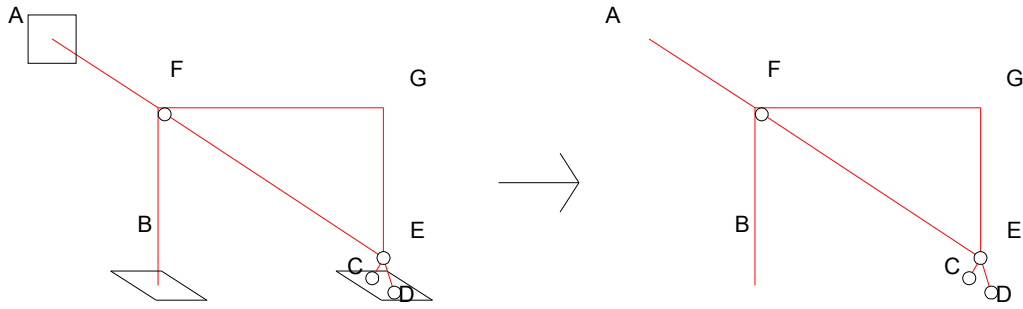
Nudo	n	$3(1+n)$	r_j	GL
A	1	6	6	0
B	1	6	6	0
C	1	6	6	0
D	1	6	6	0
E	3	12	0	12
F	1	6	0	6
G	1	6	0	6
H	2	9	0	9
I	1	6	6	0
Σ		63	30	33

2) Articulados



Nudo	n	$3(1+n)$	r_j	GL
A	0	3	3	0
B	0	3	3	0
C	0	3	0	3
D	0	3	0	3
E	0	3	3	0
F	0	3	3	0
G	0	3	0	3
H	0	3	0	3
Σ		24	12	12

3) Mixtos

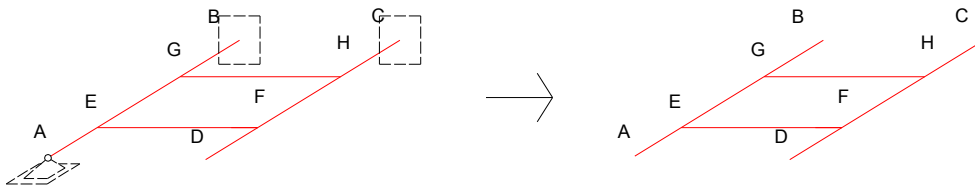


a sistema dado
)

b cuerpo libre
)

Nudo	n	$3(1+n)$	r_j	GL
A	1	6	6	0
B	1	6	6	0
C	0	3	3	0
D	0	3	3	0
E	1	6	0	6
F	1	6	0	6
G	1	6	0	6
Σ		36	18	18

4) Emparrillados



a sistema dado
)

b cuerpo libre
)

Nudo	n	$(1+2n)$	r_j	GL
A	1	3	1	2
B	1	3	3	0
C	1	3	3	0
D	1	3	0	3
E	1	3	0	3
F	1	3	0	3
G	1	3	0	3
H	1	3	0	3
Σ		24	7	17

Figura 19.

3. Conclusiones

Se ha dado un tratamiento amplio al estudio del concepto de indeterminación cinemática en estructuras, particularizándolo de modo especial a las estructuras lineales o de barras. Para ellas se presentaron fórmulas generales que permiten sistematizar la evaluación de los grados de libertad según se trate de sistemas de alma llena, reticulados o mixtos, tanto en sus disposiciones planas como espaciales. Dichas fórmulas se acompañaron con ejemplos que validan su aplicación.

Referencias

1. Gradowczyk, M., *Cálculo Matricial de Estructuras*, Euedeba, Buenos Aires, 1965.
2. Oller, S., *Generalidades sobre Mecánica* (manuscrito), Universidad Nacional de Salta, Salta, 1984.
3. Beyer, K., *Estática del Hormigón Armado*, Tomo I, Nigar, Buenos Aires, 1957.
4. Rangasami K., Mallick, S., *Degrees of Freedom of Plane and Spaces Frames*, The Structural Engineer, N°3, Vol. 44, 1966.
5. Begliardo H., *Fórmula Unificada para la Evaluación del Grado de Indeterminación Estática en Estructuras*, 20ª Jornadas A.I.E., Buenos Aires, 2008.
6. Fliess, E., *Estabilidad I*, Kapeluz, Buenos Aires, 1970.
7. Longhini, P., *Mecánica Racional*, 4ª Edic, El Ateneo, Buenos Aires, 1960.
8. Cervera Ruiz M., Blanco Díaz E., *Mecánica de Estructuras II, Métodos de Análisis*, 2ª Edic., Ed. UPC, Barcelona, 2002.
9. Gere J., Weaver W., *Análisis de Estructuras Reticulares*, CECSA, México, 1972.
10. Begliardo H., *Fundamentos y Evaluación del Grado de Indeterminación en Estructuras*, Universidad Nacional de Salta, Salta, 1986.